偏極多様体の分類とその構造(Graded Rings と可換環上の Filtration の研究)

藤田, 隆夫; 宮崎, 誓

数理解析研究所講究録 8
621巻 1987年 8-34

偏極多様体の分類とその構造

東大教養 藤田隆夫（談）(T. Fujita)
早大理工 宮崎誓 (記)
(Notes by C. Miyazaki)

まえがき

短期共同研究「Graded ringsと可換環上のfiltration」に参加し話をさせてもらったとき，ノートをとって宮崎氏が整理してくださったものが本稿である。

射影的代数多様体 V と V 上の ample 直線束 L との組 (V, L) を偏極多様体と呼ぶ。以下，テンソル積は加法的に記し，L に対応する可逆層は L と同じ記号で表わすことにする。さて L は ample だから，graded ring $G(V, L) = \bigoplus_{t \geq 0} \Gamma(V, tL)$ は有限生成であり，V はその Proj，L はその $\mathcal{O}(1)$ として再構成できる。だから，原理的には，$G(V, L)$ を調べれば (V, L) のことはわかるはずなのだが，実際には様々な幾何的手段を駆使することなしには十分な研究をすることができない。これは，$G(V, L)$ という形の graded ring，特にその中で V が非特異であるようなものの ring としての特徴を，狭義の環論の枠内の概念のみにより把握しきるのはきわめてむつかしい，

ということでもあろうか。

§0 は交点理論など代数幾何の基本事項の解説。§1 では Δ種数 $\Delta(V,L)$ と断面種数 $g(V,L)$ の定義をのべ，$\Delta \leqq 1$ ないし $g \leqq 1$ の場合の分類，del Pezzo 多様体の分類などについて述べる。§2 は代数多様体の 1-cycles の構造理論（3次元での森理論の高次元版）の紹介。§3 はこの理論を g による分類にどう応用するか，という話。とくに $g \geqq 0$ となることの証明のスケッチをする。§4 では $g=2$ の場合の分類の一端に触れる。なお，基礎体は $\mathbb{C}$ としたがΔ種数に関する部分はかなり正標数の場合にも一般化できる。g については現在のところ全くお手上げといわざるを得ない。

以上のうち §0 と §2 は宮崎氏が後で補ってくれた部分で §1, §3, §4 がほぼ私の話の内容にあたるが，詳しいことは省略，難しいところはスキップしてごまかす，といういい加減な調子のものだったので，それをこのようにまとめてくださった宮崎氏には感謝にたえない。本格的に勉強しようという向きには原論文を見ていただくよりないが，ここでは研究の雰囲気をいくらかでも味わっていただければ幸いである。このような機会をつくり様々な御世話をいただいた渡辺敬一氏へのお礼の言葉をのべてまえがきの結びとしたい。

（藤田隆夫，1987.3.11. 記）

§0. 準備

Vを体k上の射影代数多様体とし，LをV上の直線束(可逆層)とする。$s(\neq 0)$をk上ベクトル空間$\Gamma(V, L)$の元とすると，Lは可逆層であるから，sは局所的には方程式を定める。即ち，V上の点xに対して，$L_x \cong \mathcal{O}_{V,x}$の同型により，$s_x$を局所環$\mathcal{O}_{V,x}$の元とみなす。この$s_x$の零点を貼り合わせることにより，$V$上のCartier因子$D$が得られる。これを$D=(s)_0$と書き，$s$の零点と呼ぶ。$\Gamma(V, L)$の他の元に対して，上の操作でCartier因子$D'$をつくると，$D \sim D'$(線型同値)であることがわかる。Cartier因子Dと線型同値なeffective Cartier因子全体の集合を$|D|$と書けば，上で述べた対応により，k上の射影空間$\Gamma(V, L)^{\vee}-\{0\}/k^{\times}$と$|D|$は一対一に対応している。以後，上の$L$と$D$をしばしば同一視する。

次に，ベクトル空間$\Gamma(V, L)$の基底を，$s_0, \cdots, s_N$とすると，有理写像$\varphi: V \cdots\longrightarrow \mathbb{P}_k^N = \mathrm{Proj}\, k[X_0, \cdots, X_N]$ (即ち，Vの開集合Uから$\mathbb{P}_k^N$へのmorphism)で次の条件を満たすものが，存在する。

(i) $\varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \cong L|_U$

(ii) (i)により，$\varphi^*: \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1)) \hookrightarrow \Gamma(U, L)$が定義されるが，この対応により，$\varphi^*(X_i) = s_i|_U$ $(i=0, \cdots, N)$となる。

ところで，DをLに対応するCartier因子とするとき，Dの

base points の集合 $\mathrm{Bs}|D|$ を，$\mathrm{Bs}|D| = \bigcap_{D' \in D} D'$ と定義すれば，U を最大にとると，$U = V - \mathrm{Bs}|D|$ となる。 また，この有理写像 φ は一意的に定まる。また，$\mathbb{P}^N_k$ の自己同型を除けば，$\Gamma(V, L)$ の基底のとり方にも依らない。そこで，φ を $\varphi_{|L|}$ と書く。また，$\mathrm{Bs}|L| = \mathrm{Bs}|D|$ と書く。

さて，$\mathrm{Bs}|D|$ は，V の閉集合であるが，$\mathrm{Bs}|D| = F \cup X$（$F$ は，余次元1の閉集合，X は余次元2以上の閉集合）と分解したとき，F を L の fixed component という。V を locally factorial とすれば，F は，余次元1の閉集合だから，うまく構造をいれて，F を Cartier 因子とすれば，Cartier 因子 $D - F\ (\geq 0)$ に fixed point がないようにできる。

定義： L を V 上の直線束とする。

(i) $\mathrm{Bs}|L| = \phi$ のとき，L が base point free であるという。

(ii) $\mathrm{codim}(\mathrm{Bs}|L|, V) \geq 2$ のとき，L が fixed point free であるという。

L が fixed point free のとき，前に述べた $\varphi_{|L|} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^N_k$ をつくると，$\varphi^* : \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1)) \cong \Gamma(V, L)$ となる。ここで，$\Gamma(V, L)$ の元 $s\ (\neq 0)$ に対して，$H = (\varphi^*(s) = 0)$ とおけば，

$(s)_0 = \overline{\varphi_{|L|}^{-1}(H)}$ となる。但し，$\overline{Z}$ は Z の閉包を表す。

定義： L を V 上の直線束とする。

(i) L が base point free であり，$\varphi_{|L|} : V \longrightarrow \mathbb{P}_k^N$ が埋め込みであるとき，L を very ample という。

(ii) ある整数 $t(>0)$ があり，tL が very ample のとき，L を ample という。（但し，$tL = L^{\otimes t}$ で以下この記号を使う）

注意： (V, L) を polarized variety とする。

$G(V, L) = \bigoplus_{t \geq 0} \Gamma(V, tL)$ とおけば，$G(V, L)$ は k 上有限生成な algebra となり，

$$(V, L) \simeq (\mathrm{Proj}\, G(V, L), \mathcal{O}(1))$$

が成立する。

よって，polarized variety を調べるということは，k 上有限生成な graded algebra（$\mathbb{N}$ 型で，必ずしも次数 1 の元で生成されるとは限らない）を調べることである。

次に，交点数の話に移ろう。$\dim V = n$ とおき，$L_1, \cdots, L_n$ を V 上の直線束とする。すると，$\chi(V, t_1L_1 + \cdots + t_nL_n) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i H^i(V, t_1L_1 + \cdots + t_nL_n)$ は，total degree n の

$t_1, \cdots, t_n$ の多項式になる。このとき，単項式 $t_1 \cdots t_n$ の係数を $(L_1 \cdots L_n)_V$ と書き，$L_1, \cdots, L_n$ の V 上での交点数と呼ぶ。交点数については次のことが知られている。

(i) $(L_1 \cdots L_n)_V$ は，$L_1, \cdots, L_n$ について多重線型対称形式である。

(ii) $D \in |L_1|$ とすると，$(L_1 \cdots L_n)_V = (L_2|_D \cdots L_n|_D)_D$ となる。この際，D は既約とも被約とも限らないが，$D = a_1D_1 + \cdots + a_sD_s$ を D の既約分解とするとき，$(L_2 \cdots L_n)_D = a_1(L_2 \cdots L_n)_{D_1} + \cdots + a_s(L_2 \cdots L_n)_{D_s}$ とする。

(iii) V，W を n 次元射影代数多様体とし，$f: W \longrightarrow V$ を surjective morphism とする。そのとき，$(f^*L_1 \cdots f^*L_n)_W = \deg f \cdot (L_1 \cdots L_n)_V$ となる。但し，f の degree とは，関数体 $K(W)/K(V)$ の拡大次数である。

§1. Δ-種数と del Pezzo 多様体

特に断わらない限り，(M, L) を non-singular polarized variety (polarized manifold) とする。$k = \mathbb{C}$ (複素数体) でのみ考える。

$n = \dim M$ とおく。まず，次の2つの不変量を定義しよう。

定義：(M, L) を polarized manifold とする。

(i) $\Delta(M, L) = n + d - h^0(M, L)$ を (M, L) の Δ-genus

という。ここで，$d=(L^n)_V=(L\cdots L)_V$ であり，
$h^0(M,L)=\dim_{\mathbb{C}}\Gamma(M,L)$ とする。

(ii) K_M を M の標準束とする。そのとき，
$g(M,L)=\frac{1}{2}(K+(n-1)L)L^{n-1}+1$ を (M,L) の sectional genus という。

注意： $\Delta(M,L)$，$g(M,L)$ は 0 以上の整数である。但し，$g(M,L)\geq 0$ の証明には，高次元森理論を使う。

L が very ample のとき，$\varphi_{|L|}:M\hookrightarrow\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ は埋め込みとなるが，$H_1,\cdots,H_{n-1}$ を十分一般な $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ の超平面とすれば，$g(M,L)$ は，曲線 $C=M\cap H_1\cap\cdots\cap H_{n-1}$ の種数 $\dim\Gamma(C,K_C)$ に等しい。

上で定義した $\Delta(M,L)$，$g(M,L)$ が 1 以下のときの分類の結果を述べよう。

定理 1 ([F_1])

(M,L) を polarized manifold とすると，$\Delta(M,L)=0$ となるための必要十分条件は $g(M,L)=0$ であり，(M,L) は，次の場合に限られる。

(a) $(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$

(b) $(Q^n, \mathcal{O}_{Q^n}(1))$

ここで，Q^n は n 次元の 2 次超曲面であり，$\iota : Q^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ とするとき $\mathcal{O}_{Q^n}(1) = \iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1)$ を表す。

(c) (M, L) は rational scroll である。

i.e. $f : M \longrightarrow \mathbb{P}^1$ が $\mathbb{P}^{n-1}$-束で，したがって，$M = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(E)$ （E は rank n のベクトル束）と書けるが，このとき，$L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ となる，という f が存在する。

(d) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$，即ち Veronese 曲面

定義： (M, L) が del-Pezzo manifold であるとは，$\Delta(M, L) = g(M, L) = 1$ のときにいう。また，これは，$K_M \cong (1-n)L$ と同値であることが知られている。

定理 2. (M, L) を del-Pezzo manifold とすれば，(M, L) は，次のいずれかである。ここで，$n = \dim M$，$d = (L^n)$ とする。

① $n = 2$ のとき

M は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 又は，$\mathbb{P}^2$ の有限個の点の blowing-up である。

② $n \geq 3$ のとき

(a) $d = 1$ のとき，$\mathbb{P}(3, 2, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n-1})$ 内の degree 6 の weighted hypersurface である。

(b) $d=2$ のとき，$\mathbb{P}(2,\underbrace{1,\cdots,1}_{n})$ 内の degree 4 の weighted hypersurface である．

(c) $d=3$ のとき，$\mathbb{P}^{n+1}$ 内の Cubic hypersurface である．

(d) $d=4$ のとき，$\mathbb{P}^{n+2}$ 内の $(2,2)$ 型完全交叉である．

(e) $d=5$ のとき，$\mathrm{Grass}(5,2)\hookrightarrow\mathbb{P}^9$ (Plücker) を $\mathbb{P}^9$ の線型部分空間で切ったものである。

(f) $d=6$ のときは，次の3通り．

(f-1) $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$

(f-2) $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$

(f-3) $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ (但し，$T_{\mathbb{P}^2}$ は $\mathbb{P}^2$ の tangent bundle)

(g) $d=7$ のとき，$\mathbb{P}^3$ の1点 blowing-up．

(h) $d=8$ のとき $\mathbb{P}^3$

(i) $d\geq 9$ は起こらない

上で，$\mathbb{P}(n_0,\cdots,n_e)=\mathrm{Proj}\,k[X_0,\cdots,X_e]-Z$

但し，$\deg X_i=n_i$ $(i=0,\cdots,k)$

Z は閉集合で，$\mathcal{O}(1)$ が $\mathrm{Proj}\,k[X_0,\cdots,X_e]-Z$ で可逆であるような最小の集合である．

さらに，$F_1,\cdots,F_r$ を $k[X_0,\cdots,X_e]$ の weighted homogeneous polynomials で，$V(F_1,\cdots,F_r)\cap Z=\phi$ でかつ，$F_1,\cdots,F_r$ が regular sequence とな

すとき，$\mathrm{Proj}\, k[X_0, \cdots, X_e]/(F_1, \cdots, F_r)$ を weighted complete intersection（w. C.-I.）と呼ぶ．

さて，定理2の証明の概略を述べよう。

$n = \dim M = 2$ のとき，$K_M = -L$ だから，曲面論の結果から M が rational surface となる。さらに，M は $\mathbb{P}^2$ の何点かの blowing-up か，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に同型であることがわかる。とくに，M が m 個の点の $\mathbb{P}^2$ の blowing-up とし，$f : M \longrightarrow \mathbb{P}^2$ と書くと，$K_M = f^* K_{\mathbb{P}^2} + \sum_{i=1}^{m} E_i$ となる。但し，E_i $(i = 1, \cdots, m)$ は exceptional curve である。すると，$L^2 = K_M{}^2 = (f^* K_{\mathbb{P}^2} + \sum_{i=1}^{m} E_i)^2 = 9 - m$ となる。なぜなら，$K_{\mathbb{P}^2} = -3H$（H は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ に対応する直線束）で，$f^* K_{\mathbb{P}^2} \cdot E = 0$，$E^2 = -1$ であるからである。ところで，L は ample だから，$m < 9$ そして，$d = L^2 \leqq 9$ であることがわかる。また，$M \cong \mathbb{P}^1_\alpha \times \mathbb{P}^1_\beta$ のときは，$d = L^2 = (2H_\alpha + 2H_\beta)^2 = 8$ である。以上まとめて，$d = L^2 \leqq 9$ となることが得られた。

$n = \dim M \geqq 3$ のとき，証明の詳細について，[F4] に任せることにして，証明の一部を述べて，"Principle" に触れることにしよう。まず，次の補題を示す。

補題3　(M, L) を del Pezzo manifold とする。$D \in |L|$ が non-singular とすると，(D, L_D) もまた del Pezzo manifold で，

$L_D^{n-1}=L^n$ となる。

補題３の証明：Adjunction 公式より，$K_D=(K_M+L)_D$ となるから，$K_D+(n-2)L_D=(K_M+(n-1)L)_D=0$，即ち，$(D,L_D)$ が，del Pezzo となることがわかる。後半の主張は明らかである。

我々の目的は，次の方法で定理２の証明の一部に触れることである。

方法：$|L|$ の定める rational map を調べる．

① $Bs|L|=\phi$ かどうか．

② $|L|$ の general member D が non-singular かどうか．

③ (M,L) と (D,L_D) $(D\in|L|)$ の関係はないか．

主張１：(M,L) を del Pezzo 3-fold とする。このとき，$d=9$ かつ L が very ample ということは起こらない。

何故なら，L は very ample だから，general member $D\in|L|$ は non-singular である。補題３より，$(D,L_D)\cong(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}(3))$ である。Lefschetz の定理より，$\mathrm{Pic}\,M\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}^2$ だから，M 上の直線束 H で，$H|_{\mathbb{P}^2}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ となるものが存在する。すると，$L=3H$ となり，$9=L^3=27H^3$ となる。$H^3=\frac{1}{3}$ となり，こ

れで矛盾が生じた。

上の主張より，$n=\dim M \geqq 3$ のときは，$d=L^n \leqq 8$ であることがわかる。このように，次元について帰納法により，分類を完成させていくのである．もう少し例を挙げよう。
$d=6$ のときには，まず $n=3$ のとき，分類表で，(f-1) か (f-3) であることを示し，それから，次の主張を示し，$n \geqq 4$ での分類を行なうのである。

主張2：(M, L) を del-Pezzo 4-fold とし，L を very ample な直線束，$d=6$ とする。そのとき，任意の $D \in L$ に対し，$D \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とはならない。

何故なら，$D \cong \mathbb{P}^1_\alpha \times \mathbb{P}^1_\beta \times \mathbb{P}^1_\gamma$，$H'_\alpha, H'_\beta, H'_\gamma$ をそれぞれ $\mathbb{P}^1_\alpha$，$\mathbb{P}^1_\beta$，$\mathbb{P}^1_\gamma$ 上の超平面切断束の D への引き戻しとする。Lefschetz の定理より，$\mathrm{Pic}\, M \cong \mathrm{Pic}\, D = \mathbb{Z}H'_\alpha \oplus \mathbb{Z}H'_\beta \oplus \mathbb{Z}H'_\gamma$ である。この同型により，$H'_\alpha, H'_\beta, H'_\gamma$ に対応する M 上の直線束を，$H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$ とする。すると，$L_D = H'_\alpha + H'_\beta + H'_\gamma$ だから，$L = H_\alpha + H_\beta + H_\gamma$ となる。このとき，次のことが言える．

㋐ $H^0(M, H_\alpha) \cong H^0(D, H'_\alpha)$

㋑ $Bs|H_\alpha| = \phi$ （証明は読者に任す．）

したがって，次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi_{|H_\alpha|}"] & \mathbb{P}^1_\alpha \\ \cup \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft" near end] & \\ D \arrow[uur, "\text{projection}"'] & \end{tikzcd}$$

β、γについても同様の図式が得られるから，それらのSegre productをとると，次の図式を得る

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{P}^1_\alpha \times \mathbb{P}^1_\beta \times \mathbb{P}^1_\gamma \\ \cup \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft" near end] & \\ D \arrow[uur, "\sim"] & \end{tikzcd}$$

ところで，$L = H_\alpha + H_\beta + H_\gamma$だから，$L \cong \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\alpha \times \mathbb{P}^1_\beta \times \mathbb{P}^1_\gamma}(1,1,1)$となる。$\varphi$のfiberのひとつを$F$とすると，$\dim F \geqq 1$でかつ$L_F \cong \mathcal{O}_F$となるから，$L$がampleであることに矛盾する。以上で，主張2が示せた。

$d \leqq 4$のときは，次の補題を使って帰納法で示す。

補題4：(V, L)をpolarized variety，$D \in |tL|$とする。$\bar{\xi}_0, \cdots, \bar{\xi}_N$を$G(V, L) = \bigoplus_{A \geqq 0} \Gamma(V, AL)$のhomogeneousな生成元とし，$G(V, L) \longrightarrow G(D, L_D)$による像$\xi_0, \cdots, \xi_N$が$G(D, L_D)$を生成しているとする。また，$D = (\eta)_0$で，$\eta \in \Gamma(V, tL)$とする。このとき，次のことが成立する。

① $\eta, \bar{\xi}_0, \cdots, \bar{\xi}_N$は，$G(V, L)$を生成する．

② $\varphi \in k[X_0, \cdots, X_N]$を$\varphi(\xi_0, \cdots, \xi_N) = 0$を満たすhomogeneous polynomial とする。但し，$\deg X_i = \deg \xi_i$ $(i=0,\cdots,N)$ である。そのとき，ある homogeneous polynomial $\overline{\varphi} \in k[Y, X_0, \cdots, X_N]$ が存在して，㋐ $\overline{\varphi}(0, X_0, \cdots, X_N) = \varphi(X_0, \cdots, X_N)$ 及び，㋑ $\overline{\varphi}(\eta, \xi_0, \cdots, \xi_N) = 0$ を満たす。但し，$\deg Y = t$ とする。

③ $G(D, L_D) = k[X_0, \cdots, X_N]/(F_1, \cdots, F_r)$ と書けば，②のようにして，$\overline{F_1}, \cdots, \overline{F_r}$ をそれぞれ $F_1, \cdots, F_r$ の持ち上げとすれば，$G(V, L) = k[Y, X_0, \cdots, X_N]/(\overline{F_1}, \cdots, \overline{F_r})$ となる。

証明は，[F_2] を見て下さい。

系： $G(D, L_D)$ が weighted C.-I. ならば，$G(V, L)$ も weighted C.-I. である.

定理2の証明の概略は，この位にしよう。詳しい証明は [F_4] にあります。今まで，$\Delta(M, L) = g(M, L) = 1$ の場合について述べてきたが，最後に，$\Delta = 1$ の場合，そして，$g = 1$ の場合に触れてこの章を終わろう。

$g(M, L) = 1$ のときは，次のいずれかである。

(a) (M, L) は del-Pezzo manifold.

(b) (M, L) は，elliptic scroll，即ち，elliptic curve 上の $\mathbb{P}^{n-1}$-束となる。

$\Delta(M,L)=1$のとき，(M,L)は次のいずれかである。

(a) $d\geq 3$のとき del-Pezzo manifold.

(b) $d=2$のとき $\mathbb{P}^n$の double covering

即ち，finite morphism $f: M\longrightarrow \mathbb{P}^n$ $(\deg f=2)$ が存在する。Bをfの branch locusとすると，$\deg B=2g(M,L)+2$となる。このとき，$B=(F=0)$とおけば，$G(V,L)=k[Y,X_0,\cdots,X_n]/(Y^2-F)$となる。

(c) $d=1$のとき，未だ完全ではない.（詳しくは[F4]）

上の(b)について，若干の注意を加えよう。一般に，二重被覆(double covering) $f: M\to W$ があり，Wを non-singular としよう。fは finite morphismだから，$M=\mathrm{Spec}_W f_*\mathcal{O}_M$と書ける。そこで，$f_*\mathcal{O}_M$について考えよう。次の exact sequence $0\longrightarrow \mathcal{O}_W\longrightarrow f_*\mathcal{O}_M\longrightarrow \mathcal{L}\longrightarrow 0$ は，trace map $f_*\mathcal{O}_M\longrightarrow \mathcal{O}_W$ により split する。よって，同型 $f_*\mathcal{O}_M\cong\mathcal{O}_W\oplus\mathcal{L}$ を得る。fは flatだから $f_*\mathcal{O}_M$は locally free となり，$\mathcal{L}$が可逆層であることがわかる。さらに，$\mathrm{Gal}(M/W)=\{id,\sigma\}$とすると，$\mathcal{L}=\mathrm{Ker}(\mathrm{trace})$だから，$\mathcal{L}$は$\sigma$についての$f_*\mathcal{O}_M$の"eigen subsheaf"である。ところで，$\mathcal{O}_W$-代数 $\mathcal{O}_W\oplus\mathcal{L}$の代数としての構造 $\mathcal{L}^{\otimes 2}\to\mathcal{O}_W\oplus\mathcal{L}$ に

ついて考えると，$\mathcal{L}$がτについて eigen sub-sheaf であるから，$\mathcal{L}^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{L}$ は zero map となる。即ち，$\mathcal{O}_W \oplus \mathcal{L}$ の代数としての構造は $\Gamma(W, \mathcal{L}^{-2})$ の元によって定まる。

ここで，(M, L)を polarized manifold であり，Lが base point free で，$\varphi_{|L|} : M \longrightarrow W = f(M) \subset \mathbb{P}^N$ が double covering になったとしよう。すると，

$$\Gamma(M, tL) = \Gamma(W, (\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_W(t))$$

となるから，$\mathcal{O}_W \oplus \mathcal{L}$の構造を決める元を $F \in \Gamma(W, \mathcal{L}^{-1})$，$G(W, \mathcal{O}(1)) = k[\xi_0, \cdots, \xi_N]$ とすると，

$$G(M, L) = k[X, \xi_0, \cdots, \xi_N] / (X^2 - F)$$

となる。

§2 一般化された森理論

この節では一般化された森理論についての結果を述べて，次の節への準備としたい。尚，基礎体の標数は0とする。

Vを射影代数多様体，LをV上の直線束としよう。Lが nef (numerically effective) であるとは，V内のすべての曲線Cに対して，$LC (\coloneqq \deg L_C)$が非負のときをいう。また，Lが big であるとは，$\kappa(L) = \dim V$ (i.e. $\dim \Gamma(V, mL) \sim a m^{\dim V}$) のときをいう。この条件は，$m$が十分大きいとき$\varphi_{|mL|}$が birational map になることと同値である。また，交点数

を使って，$L^3>0$とも言い換えることができる。

定理5（Kawamata-Viehweg Vanishing Theorem [K1], [V]）
　Mをmanifoldとし，LをM上の直線束とする。$L-K_M$がnefでかつbigならば，

$$H^i(M,L)=0 \quad \text{for } i>0$$

が成立する。

定理6（Base point free Theorem [K2]）
　Mをmanifoldとし，LをM上の直線束とする。$L-K_M$がnefでかつbigであり，さらにLがnefとする。すると，十分大きいtに対して，$Bs|tL|=\phi$となる。

　Mをmanifoldとする。このとき，1-cycleの集合は群をなす。そこで，$N_1(M)=\{1\text{-cycle}\}\otimes\mathbb{R}/\approx$と定義する。ここで，$\approx$はnumerical equivalenceを$\mathbb{R}$上へ拡大したものである。この$N_1(M)$は有限次元であることが知られている。さらに，$N_1^+(M)$をeffective curveで生成されるcone，即ち，$N_1^+(M)=\sum_{C\text{はeffective curve}}\mathbb{R}_{\geq 0}C\subset N_1(M)$と定義する。このとき，$\gamma\in N_1^+(M)$がextremal ray (with respect to K_M) であるとは，次の条件を満たすものをいう。

(i)　$\gamma=\gamma'+\gamma''$ ($\underset{\neq 0}{\gamma'},\underset{\neq 0}{\gamma''}\in N_1^+(M)$) ならば，

γ'もγ''もγのある正の実数倍となる

(ii) $\gamma K_M < 0$

定理7 (Cone Theorem [K2])

上の Notationsで, 高々可算個の extremal rays $\gamma_1, \cdots, \gamma_k, \cdots$ があって, 次の性質を満たす。

(i) $\gamma_1, \cdots, \gamma_k, \cdots$ は, $N_1(M)$の中で局所有限である。

(ii) $\overline{N_1^+(M)}$ は, $\gamma_1, \cdots, \gamma_k, \cdots$ と K^+とで生成されるcone の閉包に一致する。

但し, K^+は, $KC \geqq 0$となるcurveの生成するconeである。

さらに, AをM上のample因子, εを正の実数とすると, 上の$\gamma_1, \cdots, \gamma_k, \cdots$の中で, $(K+\varepsilon A)\cdot\gamma_k < 0$となるものは有限個で, それらを$\gamma_1, \cdots, \gamma_A$とすると,

$$\overline{N_1^+(M)} = \sum_{j=1}^{A} \mathbb{R}_+\gamma_j + (K+\varepsilon A)^+$$

(但し, $(K+\varepsilon A)^+ = ((K+\varepsilon A)\cdot C \geqq 0$となるCurve Cで張られるcone$)$)

となる。

§3 切断種数

この節では, polarized manifold (M, L) の切断種数$g(M,L)$が0以上となることを前節の応用として述べる。

$F = K + (n-1)L$ $(n = \dim M)$ について考えよう。$(n \geqq 2)$

まず，$F = K + (n-1)L$ が nef であるとしよう。すると，$(F.L^{n-1}) \geq 0$。よって，$g(M,L) = \frac{1}{2}(F.L^{n-1}) + 1 \geqq 1$ となることが示された。

次に，F が nef でないと仮定するとき，$g(M,L) \geq 0$ を示そう。仮定より，$(K+(n-1)L)C < 0$ となる effective curve C が存在する。すると，定理7より，$(K+(n-1)L)\gamma < 0$ となる extremal ray γ が存在する。よって，次の条件を満たす直線束 H がとれる。

(i) H は nef (i.e. linear functional $(H.\cdot)$ は $N_1^+(M)$ 上非負)

(ii) $C \in N_1^+(M)$ に対して，$HC = 0$ と $C \in \mathbb{R}_+\gamma$ は同値である。

そこで，十分大きな $t \gg 0$ をとると，$tH - K$ は $\overline{N_1^+(M)}$ 上で，positive となる。Kleiman の判定法より，$tH - K$ は ample である。とくに，$tH - K$ は nef でかつ big である。定理6より，t をさらに十分大きくとると，$Bs|tH| = \phi$ となる。よって，$f: M \longrightarrow W$ で次の条件を満たすものが得られる。

(i) $f = \varphi_{|tH|}$

(ii) $f_*\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_W$ (c.f. §0の注意)

そのとき，Z を M 内の任意の curve とすると，$f(Z) = (\text{a point})$ と，$Z \in \mathbb{R}_+\gamma$ は同値である。何故なら，$f(Z) = (\text{a point})$ は，$tH.Z = 0$ と同値で，これは，$K.Z = 0$ のことだから，$Z \in \mathbb{R}_+\gamma$ を意味する。即ち，f は"γ の contraction"になる。さらに，

この場合には，$\dim W = 1$ or 0 であることがわかる。この証明は省略しよう。さらに，$\dim W = 1$ のとき，$f: M \longrightarrow W$ の general fiber を X とすると，$(X, L|_X) \simeq (\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(1))$ が言えて，f が scroll となることが示される。よって，(M, L) は，曲線 W 上の scroll，即ち，$(M, L) \cong (\mathbb{P}_W(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_W(E)}(1))$ と書ける。但し，E は W 上の ample ベクトル束である。ところで，$g(M, L) = g(W)$ だから，$g(M, L) \geqq 0$ がいえる。また，$\dim W = 0$ のときは，$\dim N_1(M) = 1$ になる。そこで，(M, L) は，$(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$, $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$, $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{O}(1))$（$\mathbb{Q}^n$ は n 次元 2 次超曲面）のどれかに同型になり，$g(M, L) \geqq 0$ となる。

以上のことから，次の定理を得る。

定理 8

polarized manifold (M, L) に対し，切断種数 $g(M, L)$ は 0 以上となる。

§4. $g(M, L) = 2$ の偏極多様体

この節では，$g(M, L) = 2$ の polarized manifold を扱う。しかし，分類表を完全に書くと，膨大になるため，詳しいことは，[F_6] に任せて，ここでは，分類の一部のみを述べよう。

さて，$g(M, L) = 2$ となる polarized manifold について考えよ

う。$K+(n-1)L$ が nef でないとき，§3より，(M,L) は，genus 2 の曲線 C 上の scroll，即ち，$(M,L)\simeq(\mathbb{P}_C(E),\mathcal{O}(1))$ となる。但し，E は C 上のベクトル束である。よって，$K+(n-1)L$ が nef のときの分類を考えればよい。この場合にも，$K+(n-2)L$ が nef か否かで場合分けをする。$K+(n-2)L$ が nef でないときは，§3と同様にして議論する。$K+(n-2)L$ が nef のときを考えよう。このとき，$(K+(n-2)L)L^{n-1}\geqq 0$ だから，$L^n\leqq(K+(n-1)L)L^{n-1}=2g(M,L)-2=2$ となる。$L^n=2$ のときは，等号が成立し，$(K+(n-2)L)L^{n-1}=0$ となり，L が ample だから，$K+(n-2)L=0$ となる。このときは，(M,L) は $\mathbb{P}^n$ の double covering となる。$L^n=1$ のときは，$K+(n-3)L=0$ であることが，言える。

以後，$K+(n-3)L=0$ と仮定しよう。

補題9　(M,L) を上の様にすると，$H^1(M,\Theta_M)=0$ 及び，$H^p(M,tL)=0$ $(0<p<n,\ t\in\mathbb{Z})$ が成立する。　（証明は略）

まず，$\Delta(M,L)=1$ のときについて考えよう。すると，$\dim H^0(M,L)=n+(L^n)-\Delta(M,L)=n$ となる。そこで，$M=D_n\supset D_{n-1}\supset\cdots\supset D_1$ $(D_j\in|L_{D_{j+1}}|\ (j=1,\cdots,n-1))$ となる ladder を得る。$C=D_1$ は，irreducible reduced curve で，$h^1(C,\mathcal{O}_C)=2$ である。

さらに，$2L_C = K_C$ である。このことから，(C, L_C) が，$\mathbb{P}(5,2,1)$ 内の degree 10 の weighted hypersurface であることがわかる。補題4より，(M, L) は，$\mathbb{P}(5,2,\underbrace{1,\cdots,1}_{n\text{個}})$ 内の degree 10 の weighted hypersurface である。

$\Delta(M, L) = 2$ のときも，上と同様にして，(M, L) は，$\mathbb{P}(3,3,2,2,\underbrace{1,\cdots,1}_{n-1\text{個}})$ 内の $(6,6)$ 型の weighted C.I. であることがわかる。

さて，$\Delta(M, L) = 3$ のとき，$n = \dim M \geqslant 4$ の場合，未だ，そのような例は見つかっていない。$n = \dim M = 3$ のときを考えよう。以下，(M, L) を polarized 3-fold で，$K = \mathcal{O}$，$L^3 = 1$ としよう。

補題10　(M, L) を上のようにすると，$\#(\text{torsion part of } \operatorname{Pic} M) \leqslant 5$ が成立する。

（証明は略）

$\#(\text{torsion part of } \operatorname{Pic} M) = 5$ としよう。すると，Galois covering $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ s.t. $\operatorname{Gal}(\widetilde{M}/M) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ がとれる。そのとき，次が成立する。

補題11　$\widetilde{M}$ は $\mathbb{P}^4$ の degree 5 の hypersurface である。

証明) $\tilde{L}=\pi^*L$ とおく。まず，$\tilde{L}$ が base point free であることを示そう。$T=\mathrm{torsion}(\mathrm{Pic}\,M)\cong\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の生成元のひとつを N とおき，$L_j=L+jN$ $(j\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ としよう。すると，L_j も ample であり，$\dim H^0(M,L_j)=\chi(M,L_j)=\chi(M,L)=1$ となる。ここで，$S_j\in|L_j|$ をとると，S_j は irreducible reduced である。何故なら，$(L^2S_j)=L^3=1$ となるからである。$k\neq j$ のとき，$S_j\neq S_k$ だから，$C_{jk}=S_j\cap S_k$ は genus 2 の irreducible reduced curve である。さらに，$k\neq l$ のとき，$H^0(\mathcal{O}_{S_j}(L_k-L_l))=0$ だから，C_{jk} と C_{jl} は異なり，$S_j\cap S_k\cap S_l=$ one point となる。これを続けて，j,k,l,m が異なるとき，$S_j\cap S_k\cap S_l\cap S_m=\phi$ がわかる。故に，$\tilde{L}$ は base point free である。よって，$|\tilde{L}|$ は，morphism $\varphi:\tilde{M}\longrightarrow\mathbb{P}_k^{\dim H^0(\tilde{M},\tilde{L})}$ を定める。ところで，$\dim H^0(\tilde{M},\tilde{L})=\chi(\tilde{M},\tilde{L})=5\chi(M,L)=5$，また，$(\tilde{L}^3)=5\cdot(L^3)=5$ であるから，φ は birational morphism，そして，$W=\varphi(M)$ とすると，W は $\mathbb{P}^4$ の5次超曲面であることがわかる。さて，$\dim H^0(\tilde{M},s\tilde{L})\geqq\dim H^0(W,\mathcal{O}_W(s))=\frac{5}{6}(s^3+5s)$ $(s\gg0)$ であり，一方，$\dim H^0(\tilde{M},s\tilde{L})=\chi(\tilde{M},s\tilde{L})=5\chi(M,sL)=\frac{5}{6}(s^3+5s)$ $(s\gg0)$ である。よって，s が十分大きいとき，$H^0(\tilde{M},s\tilde{L})\cong H^0(W,\mathcal{O}_W(s))$ となる。故に，$\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{M}}\cong\mathcal{O}_W$ となるから，Zariski's Main Theorem より，φ は同型となる。

例）$\widetilde{M}=\{\xi_0^5+\cdots+\xi_4^5=0\}\subset\mathbb{P}^4$ とし，$T=\{\xi_j\mapsto e^{\frac{2\pi i}{5}j}\xi_j\}$ を考えると，$M=\widetilde{M}/T$ は，manifold である．また，$\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(1)$ は，T-invariant だから，M上の line bundle L が存在して，$\pi^*L=\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(1)$ となる。これは，実際に，$K_M=\mathcal{O}_M$，$(L^3)=1$ となり，$g(M,L)=2$ となる。

$\#$(torsion part of Pic M) $=4$ のとき，同様に，$\pi:\widetilde{M}\to M$ をつくると，$(\widetilde{M},\widetilde{L})$ は，$\mathbb{P}(2,2,1,1,1,1,1)$ の $(4,4)$ 型の weighted C. I. となる。証明は，長いので，[F_6] に任せよう。

$\#$(torsion part of Pic M) ≤ 3 のときは，未だよくわかっていない。そのような例を見つけることは，これからの問題である。

以上で，$g(M,L)=2$ となる polarized manifold (M,L) の分類を終わる。詳しくは，[F_6] を見て下さい。

文献

[F_1] T. Fujita, On the structure of polarized varieties with Δ-genera zero, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo 22 (1975).

[F2] T. Fujita, Defining equations for certain types of polarized varieties, Complex Analysis and Algebraic Geometry (Baily and Shioda eds.), Iwanami, Tokyo, (1977).

[F3] T. Fujita, On the hyperplane section principle of Lefschetz, J. Math. Soc. Japan 32 (1980).

[F4] T. Fujita, On the structure of polarized manifolds with total deficiency one I ~ III, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 36 (1984).

[F5] T. Fujita, Semi-positive line bundles, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, A-30 (1983).

[F6] T. Fujita, Classification of polarized manifolds of sectional genus two, preprint.

[K1] Y. Kawamata, A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem, Math. Ann. 261 (1982)

[K2] Y. Kawamata, The cone of curves of algebraic varieties, Ann. of Math. 119 (1984).

[Kl] S. Kleiman, Toward a numerical theory of ampleness, Ann. of Math. 84 (1966).

[M1] S. Mori, On a generalization of complete intersections, J. Math. Kyoto Univ. 15 (1975).

[M2] S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math. 116 (1982).

[V] E. Viehweg, Vanishing theorems, J. reine angew. Math. 335 (1982).

補足とこれからの問題

1) $\Delta = g$ かつ $H^p(M, tL) = 0$ $(0<p<n, t\in \mathbb{Z})$ が成立する (M, L) についての分類をすること。

注：$\Delta = g \leq 15$ でかつ，$G(M,L)$ が k 上 $H^0(M,L)$ の元で生成されている場合については，Ionescu の結果がある。

2) V が singular のときは，$\Delta(V, L) \geqq$ が成立するかどうか。

注：V が canonical singularities のみもつときは上の命題は正しい。一般には，$\dim V = 2$ でも open problem である。

3) V が singular のとき，Δ による分類をすること。

注：$\Delta = 0$ のときは，non-singular variety 上の cone だけが，付け加わる。

$\Delta = 1$ で，L が very ample のときは，宮田記念号に結果がある。

4) 基礎体 k の標数が $p(>0)$ のとき，"$g = 0$ ならば $\Delta = 0$"

ということが成立するかどうか，また，Δによる分類はどうなるか。

注：$\Delta = 0$ のときは，char $k = 0$ と同じ分類である。

(M, L) が del Pezzo manifold のときは，$p \neq 2$ ならば，char $k = 0$ のときと同じ分類である。

（宮崎 誓 記）